目次

1.円運動......4
1.1 円運動とは......4
1.2 等速円運動......4
1.3 等速でない円運動......8
1.4「～のための条件」問題の解法......12
1.5 円運動のまとめ......16
2.単振動......18
2.1 等速円運動との関係......18
2.2 単振動の力学的エネルギー保存則......20
2.3 sin で表されない単振動......22
2.4 鉛直ばねの解法......24
2.5 ２点間の移動にかかる時間......28
2.6 固定されていない物体のある単振動......28
2.7 単振動のまとめ......30
3.演習問題......32

1.　円運動

1.1 円運動とは

（定義）円周上または円周の一部（以下、円弧という）を動く運動

２次元の運動である（放物運動と同じ。等速直線運動や等加速度運動は１次元）

円弧の中心からの距離は常に一定：半径 r

1.2 等速円運動

（定義）速さが一定である円運動

速度一定ではないことに注意

1.2.1 速度を求めよう

円運動する物体が、Δt 秒間に点 A から点 B まで $\Delta\theta$ ラジアンだけ回ったとする。

このとき、２点間の平均速度はベクトルを用いて、

$$\overrightarrow{v_{AB}}=\frac{\overrightarrow{AB}}{\Delta t}$$

と表せる。その大きさが速さにあたるので、$\Delta\theta$ が十分小さい時、

$$v_{AB}=\frac{\overline{AB}}{\Delta t}\simeq\frac{\widehat{AB}}{\Delta t}=\frac{r\Delta\theta}{\Delta t}$$

と近似できる。点 A における瞬間の速さ v は、$\Delta t\to o$ の極限をとって、

$$v=\lim_{\Delta t\to o} v_{AB}=\lim_{\Delta t\to o}\frac{r\Delta\theta}{\Delta t}=r\frac{d\theta}{dt}$$

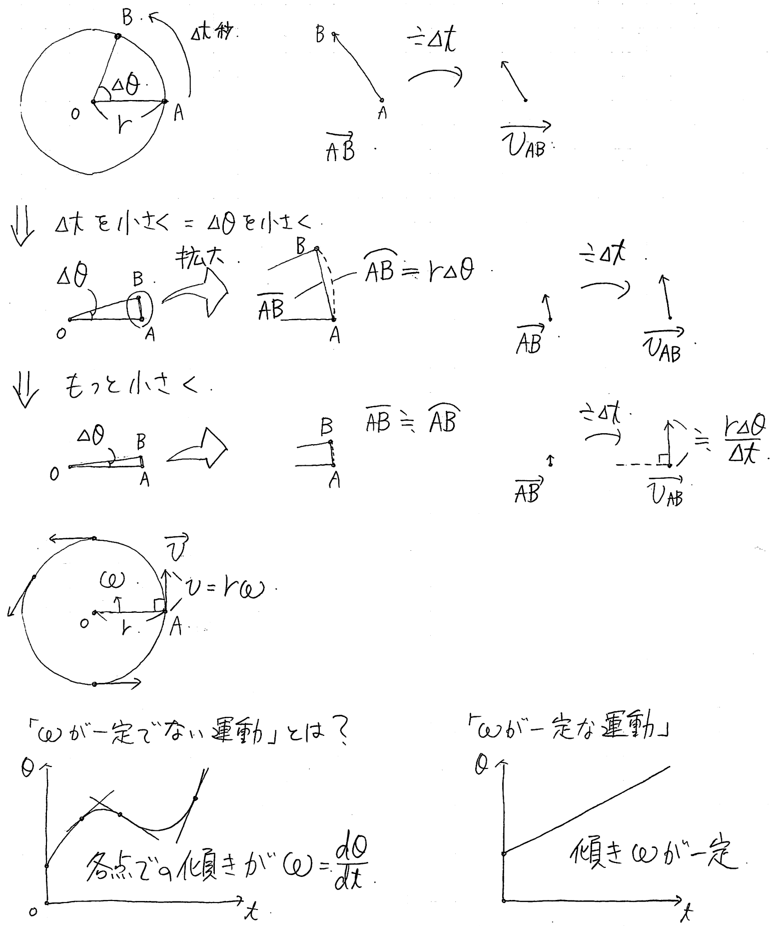
ここで、角速度 ω を

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}$$

で定義すれば、v が一定となるには ω が常に一定である必要がある。

つまり、等速円運動とは、角速度 ω が一定値であるような円運動である。

速度の向きはどうだろうか。$\Delta t\to o$ の極限を取ると、点 B は点 A へと円弧上を動いて近づくので、 $\overrightarrow{AB}$ の向きは接線方向に近づく。よって点 A における瞬間の速度は、



速さ　$v=r\omega$　、向きは点Aにおける接線向き

と言える。

1.2.2 角速度、周期、回転数

角速度ωは、厳密にはθが増加するなら正、減少するなら負であるが、通常はθが増加する方向を角度の正の向きとして、ωが正の定数となるようにする。

定義より、　$\Delta\theta=\omega\Delta t$　である。

ωが一定であるとき、円運動に周期と回転数が定義できる。

周期T：円を１周するのにかかる時間

周期Tには２通りの求め方がある。角速度ωで時間Tかけて進む角度は１周すなわち2πであるから、

$$2\pi=\omega T$$

また、速さvで時間Tかけて進む距離は円周すなわち$2\pi r$であるから、

$$2\pi r=vT$$

この２式は　$v=r\omega$　を考えれば同じ関係である。

回転数f：単位時間あたり円を何周したか

$$f=\frac{1}{T}$$

1.2.3 加速度を求めよう

点Aから点Bまで　$\Delta\theta=\omega\Delta t$　回る間に速度が　$\vec{v_1}$　から　$\vec{v_2}$　に変化したとする。この２つのベクトルを始点を揃えて図のように点P, Q, Rをおけば、その間の平均加速度は、

$$\overrightarrow{a_{AB}}=\frac{\vec{v_2}-\vec{v_1}}{\Delta t}=\frac{\overrightarrow{QR}}{\Delta t}$$

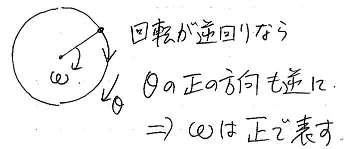
で与えられるが、これは速度を求めた時と同じ中心角$\Delta\theta$の円弧で、半径をrから

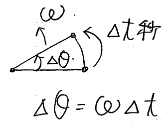
$$|\vec{v_1}|=|\vec{v_2}|=v$$

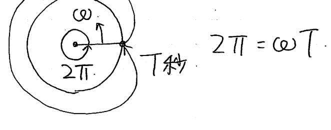
に変えたものに他ならないから、点Aにおける瞬間の加速度は

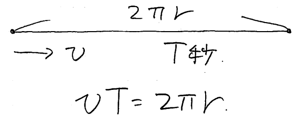
大きさ　$a=v\omega$　、向きは　$\vec{v_1}$　と直交つまり中心向き

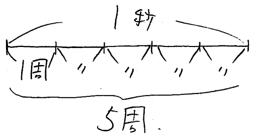
となる。



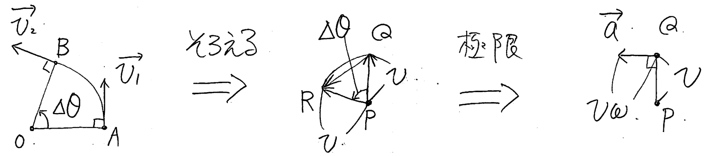


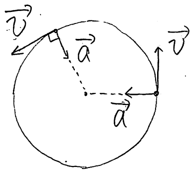






$T=0.2$ なら $f=5$　　$f=\frac{1}{T}$





$a = v\omega$　：rが未知なとき

$= r\omega^2$　：vが未知なとき

$= \frac{v^2}{r}$　：ωが未知なとき

1.2.4 加速度の３つの表記

$v=r\omega$ を用いると、加速度の大きさ $a=v\omega$ から v や ω を消去できる。

$a=(r\omega)\omega=r\omega^2$

$a=v\dfrac{v}{r}=\dfrac{v^2}{r}$

つまり、等速円運動では、r, ω, v, a のうち２つが分かれば、残りの２つは導ける。

1.2.5 運動方程式

等速円運動の問題の解法の１つめは、「中心向きの一定の大きさの加速度を生じるのは、中心向きの一定の大きさの力が働く結果である」という、運動方程式をたてる方法である。このような力を向心力という。

このとき、加速度は３つの表記のうち適するものを用いればよい。

例１）半径 r、角速度 ω の等速円運動を行う質量 m の物体に働いている向心力は？

$F=mr\omega^2$

例２）ある物体に半径 r、速さ v の等速円運動をさせるのに、大きさ F の向心力が必要であった。この物体の質量は？

$m\dfrac{v^2}{r}=F \quad \therefore \ m=\dfrac{Fr}{v^2}$

1.2.6 遠心力

もうひとつの解法は、物体と一緒に円運動（＝加速度のある運動）をする観測者から見る方法である。このとき物体は静止して見えるが、慣性力を考慮してやれば実在する力とつりあうように見え、外から見たのと同じ運動の法則が成り立つ。

円運動で中心と逆向き（遠心方向）に働く慣性力を遠心力といい、大きさは ma である。上記例１）では、外向きに $mr\omega^2$ の遠心力が働くので、向心力とのつりあいの式は、

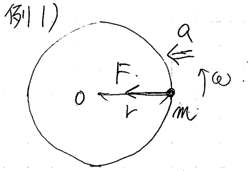
$F-mr\omega^2=0$

で、数学的にはこの２つの解法は同じ式となる。

1.3 等速でない円運動

このタイプのほとんどは、鉛直面内での円運動である。

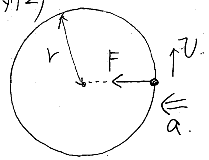
例1)



$a=r\omega^2$ より、

$F=mr\omega^2$.

例2)

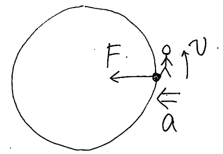


$a=\dfrac{v^2}{r}$ より、

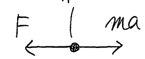
$m\dfrac{v^2}{r}=F$

$\therefore m=\dfrac{Fr}{v^2}$.

遠心力 = 円運動で生じる慣性力.



外から見た図



から見た図

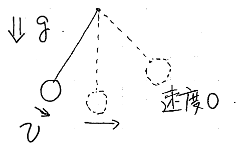
力のつりあいの式

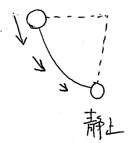
$F-ma=0$

$\therefore F-mr\omega^2=0$.

非等速円運動.

・重力が働く　　・摩擦がある　　など.





1.3.1 等速円運動との比較

	等速	非等速
r	一定	
T、f	一定	（なし）
ω	一定	（変化）
速度の向き	接線方向	
v	一定	変化→エネルギーの立場から求められる
加速度の向き	中心向き	（変化）
加速度の大きさ	一定	（変化）
加速度の向心成分 a	大きさに等しい	変化→常に $a=\dfrac{v^2}{r}$
加速度の接線成分	0	（変化）

つまり、非等速円運動では加速度は（したがって合力も）中心を向くわけではなく、向心成分と接線成分に分解して、向心成分のみで運動方程式を立てれば良い。

変化する角速度 ω を直接求めるのは難しいので、加速度は $a=\dfrac{v^2}{r}$ で表す。ここで速さ v はその地点における瞬間の速さであり、これは常に変化するので力学的エネルギー保存則などを用いて求めなければならない（等加速度運動のように直接 t の関数としては求まらない）。

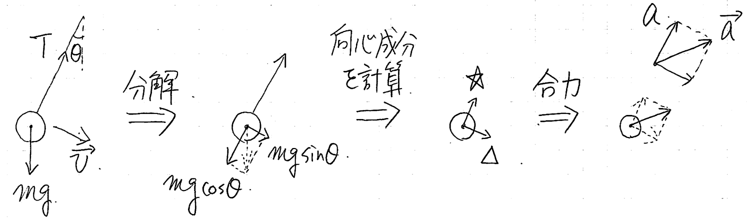
1.3.2 向心力とエネルギー

力学的エネルギー保存則が成り立つ条件を考えておく。

図のように、張力と重力を受けて鉛直面内で円運動する物体がある。仕事の出入りがなければ、エネルギーは保存する。

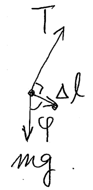
張力は常に中心を向くから、接線向きの微小の変位 Δl と常に直交しており、仕事をしない。一般に、伸び縮みしない糸の張力、面からの垂直抗力、荷電粒子に働くローレンツ力などは、仕事をしない力である。

重力は変位の向きと直交するとは限らず、仕事をする。しかし、重力は位置エネルギーを考慮しているから、ΔW の仕事をすれば、そのぶん位置エネルギーが減少し、力学的エネルギーは変化しない。



・合力で考えても解けない
・☆の力と a で運動方程式
・△の力が $|\vec{v}|$ を変化させるが、計算は困難 ⇒ エネルギー利用

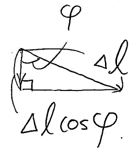
非等速円運動は
◎ エネルギーの式
◎ $m\frac{v^2}{r}=F$
の2式だけ

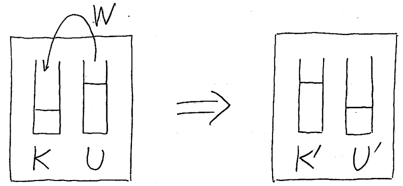


$W_T=0$ （$\because \vec{T}\perp\Delta\vec{l}$）

$\Delta W = mg\Delta l\cos\varphi$

$\Delta U = mg(-\Delta l\cos\varphi) = -\Delta W$





$E=K+U$　　$E'=K'+U'$

$K'=K+W$

$U'=U-W$

$\therefore E'=K+U=E$

$E=K+U$, $E'=(K+\Delta W)+(U-\Delta W)$ $\therefore E'=E$
まとめると、中心方向の力、および、位置エネルギーを考えてある力だけで円運動している場合、力学的エネルギー保存則が使える。

それ以外の力（摩擦力など）が働くときは、仕事とエネルギーの関係を用いる。

1.4 「〜のための条件」問題の解法

1.4.1 等式法 vs. 不等式法

例）張力がX以上になると切れる糸がある。この糸を力Fで引っぱった。糸が切れないためにFが満たすべき条件を述べよ。

（等式法）境目となる値（張力$T=X$）を代入して、等式で計算する。条件の不等号は、あとで考える。

作用反作用の法則$F=T$に$T=X$を代入して、$F=X$。これが限界となるが、Fはそれより小さければよく、$F<X$。

（不等式法）制限のある量（T）を、条件を求めたい量（F）で表し、制限の不等式をFについて解く。

作用反作用の法則$F=T$より、$T=F$。Tの制限は、$T<X$。よって、$F<X$。

制限が１つで、不等号の向きが明らかな場合、等式法で十分である。制限が複数あるときや、向きが判断しづらいときなどは不等式法が必要となる。

1.4.2 ある位置に到達できる条件

制限の不等式：その位置での運動エネルギー$K \geqq 0$

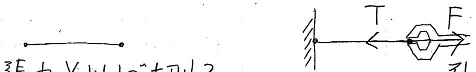
例）地面から初速vで真上に投げ上げた質量mの小球が、高さhに到達できるためにvが満たすべき条件を求めよ。重力加速度はgとする。

（等式法）
高さhでちょうど静止するときが限界である。そのときの初速を v_0 とすれば、力学的エネルギー保存則は、

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2=mgh+\frac{1}{2}m0^2$$ よって、 $v_0=\sqrt{2gh}$

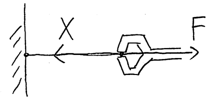
vは v_0 以上であればよく、 $v \geqq \sqrt{2gh}$

(不等式法)



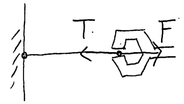
張力X以上で切れる　　引っぱる

（等式法）ちょうど切れる限界を考える

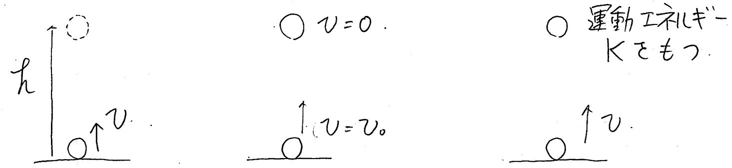


F = X が限界
Fがより小さければ、張力も小さい
∴ F < X

（不等式法）切れてないとして、Tを求める



T = F である
T < X が必要なので、代入して
F < X



（等式法）　（不等式法）

高さ h で運動エネルギー K を持っていたとすると、力学的エネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}mv^2=mgh+K \quad \text{よって、} \quad K=\frac{1}{2}mv^2-mgh$$

実際に到達するための K の制限は、$K \geqq 0$ であるから、

$$\frac{1}{2}mv^2-mgh \geqq 0 \quad \therefore \quad v \geqq \sqrt{2gh}$$

1.4.3 糸がたるまない・面から離れない条件

糸の張力 T は引っ張る方向、面からの垂直抗力 N は押す方向にしか働けない。つまり、$T \geqq 0$（$N \geqq 0$）が制限の不等式となる。計算上、負になった場合、実際は糸ならたるんでおり、垂直抗力なら面から離れている。

例）重さ w の物体が水平面上に置かれている。上向きに力 F をかけたとき、面から離れる条件を求めよ。

（等式法）

垂直抗力 N が 0 となるのが限界である。よって、力のつりあいの式は、$F+0=w$。よって、$F=w$ が限界で、これより大きければ離れる。$F>w$。

（不等式法）

力のつりあいの式は、$F+N=w$。よって、$N=w-F$。$N \geqq 0$ なら離れないので、制限は $N<0$、つまり $w-F<0$。これを F について解いて、$F>w$。

※糸の代わりに剛体棒を用いたり、面ではなくレールやパイプであるなら、逆向きの力も働けるので、この制限はない。上記の例では、物体が水平に固定されたパイプ中にちょうど収まっているなら、いくら F を大きくしても離れることはない。

1.4.4 鉛直面内の円運動への適用

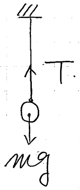
例）質量 m の物体が、半径 r の円筒の内面を摩擦なく運動する。最下点で右向きに初速 v_0 を与えたとき、図のように測った角が θ（$0 \leqq \theta \leqq \pi$）である点まで内面から離れず達するための条件を述べよ。重力加速度は g とする。

その点での速さを v、垂直抗力を N とする。力学的エネルギー保存則より、

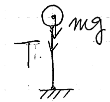
$$\frac{1}{2}mv^2+mgr(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mv_0^{\ 2} \quad \therefore \quad v^2=v_0^{\ 2}-2gr(1-\cos\theta)$$

実際にその点で運動エネルギーを持つには $v^2 \geqq 0$ が必要で、

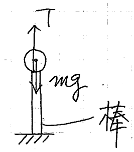
$$v_0 \geqq \sqrt{2gr(1-\cos\theta)} \quad \cdots ①$$



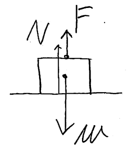
T>0 なので
たるまない



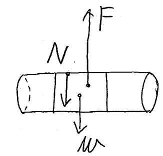
T+mg=0
∴T=−mg<0
実際はたるむ



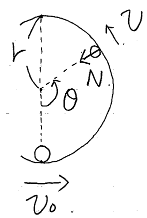
棒なら、引く方向を正として負のTもOK
⇒たるまない



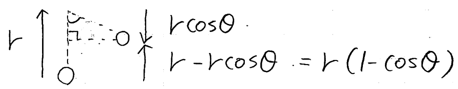
力のつりあいの式
F+N=w



パイプなら逆向きのNもOK ⇒離れない



高さの差は？



また、向心方向の運動方程式より、

$$m\frac{v^2}{r}=N-mgcos\theta$$

$$\therefore\ N=\frac{m}{r}\{v_0{}^2-2gr(1-cos\theta)\}+mgcos\theta$$

$$=m\frac{v_0{}^2}{r}-mg(2-3cos\theta)$$

内面から離れないためには、 $N\geqq 0$ が必要で、

$v_0\geqq\sqrt{gr(2-3cos\theta)}$ …②

①と②をともに満たすことが条件だが、図のように $cos\theta\geqq 0$ では②は①に含まれ、逆に $cos\theta\leqq 0$ では①が②に含まれるので、

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ **のとき** $v_0\geqq\sqrt{2gr(1-cos\theta)}$

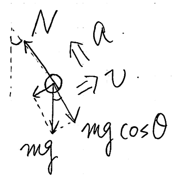
$\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ **のとき** $v_0\geqq\sqrt{gr(2-3cos\theta)}$

が求める条件となる。

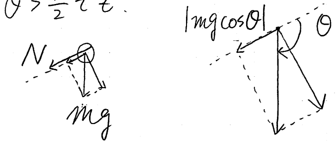
これは徐々に v_0 を小さくしていくことを考えれば、物理的に説明できる。すなわち、円筒の下半分では先に静止してしまい内面から離れることはないが、上半分ではある程度の速さがないと内面から離れてしまう。

1.5 円運動のまとめ

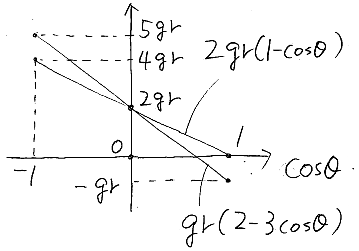
- 等速円運動
  - a を３つの式のうちどれかで表す。
  - 運動方程式か、遠心力を含むつりあいの式を立てる。
- 非等速円運動
  - エネルギーを考えて v を求める。
  - $a=\frac{v^2}{r}$ を用いて、向心成分のみについて、運動方程式か、遠心力を含むつりあいの式を立てる。
- 到達できる限界問題
  - エネルギーの条件を立式する。
  - 負になれない力があるときには、その条件を立式して連立する。

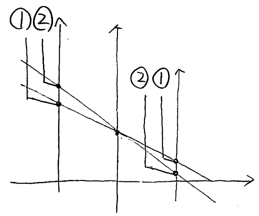


θ > π/2 でも.

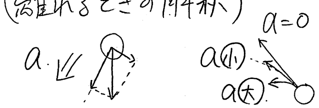


mg の成分は中心を向くが
遠心方向に mgcosθ < 0 と考えられる.





(離れるときの解釈)



重力の向心成分だけで
円運動に必要であるより
大きな向心加速度を
生じている。
(2回微分 = 曲率
= どれくらい上に凸か).

2.　単振動

2.1 等速円運動との関係

たとえば放物運動は、x 方向は等速直線運動、y 方向は等加速度運動というように、成分に分けて理解できる。

等速円運動は、中心を原点に任意の方向に軸をとれば、その方向の運動は単振動になっている。

2.1.1 軸の導入

円運動の半径を A としておく。図のような x 軸をとると、時刻 t における x 方向の位置は、

$x = A\sin\omega t$

で表される。単振動においては、A を振幅、ω を角振動数、 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ を周期、 $f=\frac{1}{T}$ を振動数とよぶ。

2.1.2 速度・加速度

等速円運動の速度ベクトル、加速度ベクトルを、x 軸に写したものが、単振動の速度、加速度と言える。ベクトルの大きさはそれぞれ $A\omega$, $A\omega^2$ だったから、

$v = A\omega\cos\omega t$, $a = -A\omega^2\sin\omega t$

ここで最大速度を $v_0 = A\omega$ とおけば、 $v = v_0\cos\omega t$ となる。

加速度については、 $x = A\sin\omega t$ を考えれば、

$a = -\omega^2 x$

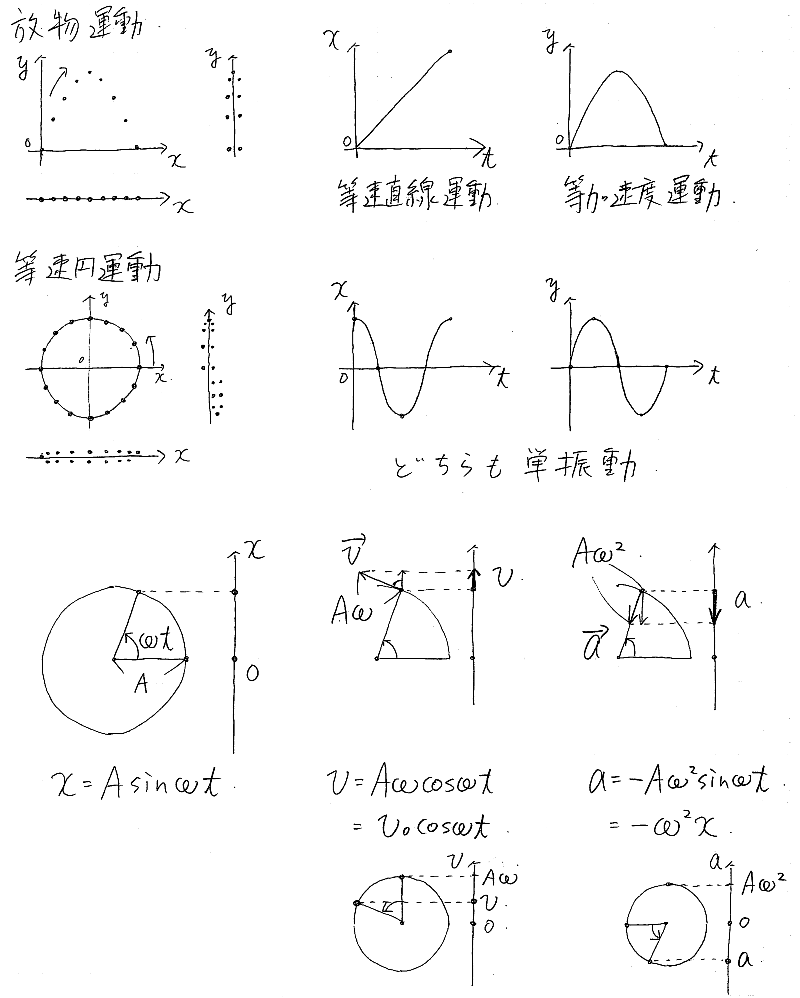
という関係が成り立つ。つまり、単振動においては、常に原点からの変位の大きさに比例する、原点向きの加速度があると言える。

2.1.3 運動方程式

1次元の運動方程式 $ma = F$ にこの加速度を代入すれば、

$m(-\omega^2 x) = F$

よって、角振動数 ω の単振動を行っている質量 m の物体には、比例定数を $k = m\omega^2$ と



する、変位の大きさに比例した原点向きの力

$F=-kx$

が常に働いている。このように表される力を復元力という。

逆に、質量 m の物体が受ける力が復元力 $F=-kx$ で表されたなら、その物体は単振動をし、その角振動数 $\omega\,(>0)$ および周期 T は、

$$k=m\omega^2 \quad \therefore \ \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

となる。これらが振幅 A とは無関係であることに注意。

2.2 単振動の力学的エネルギー保存則

2.2.1 ばねの弾性エネルギー

フックの法則に従うばね定数 k のばねが、自然長から x だけ伸びた、または縮んだ状態において、ばねには弾性エネルギー（位置エネルギーの一種）が、

$$U=\frac{1}{2}kx^2$$

だけ蓄えられている。この式は、x を自然長の位置を原点とする符号をもった変位としても、問題なく成立する。また、エネルギーの基準は自然長の位置である。

2.2.2 水平ばねによる単振動

質量 m の物体が、水平に置かれたばね定数 k のばねにつながれて、ばねの長軸方向のみに摩擦なく運動する。このとき、自然長の位置を原点とする x 軸をとれば、任意の時刻の位置 x と速度 v について、力学的エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=(\text{一定})$$

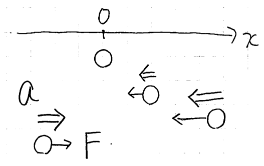
が成り立つ。

例１）ばねを A だけ押し縮めて静かに手を離した。自然長の位置を通過する時の速さを求めよ。

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2+0=0+\frac{1}{2}kA^2 \quad \therefore \ v_0=A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

これは $v_0=A\omega$ の別の導き方でもある。

例２）位置 x_0 で初速 v_0 を与えた。この単振動の振幅を求めよ。



単振動の加速度は

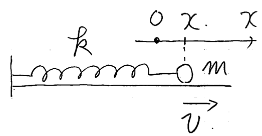
$a=-\omega^2 x$

復元力は

$F=-kx$

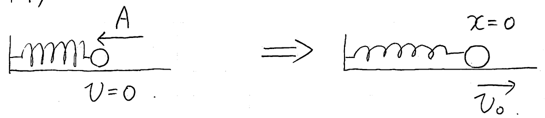
$\therefore \ m(-\omega^2 x)=-kx$

$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$, $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ は覚えて使ってもOK

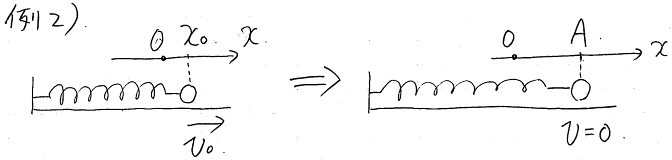


$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=(\text{一定})$

例1)



例2)



$$0+\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mv_0{}^2+\frac{1}{2}kx_0{}^2 \quad \therefore \quad A=\sqrt{\frac{m}{k}v_0{}^2+x_0{}^2}$$

2.3 *sin* で表されない単振動

ここまでは、変位・速度・加速度を t で表す式では、変位が sin で表されるように軸をとった上で議論を進めてきた。実際には、どの位置から運動を開始するかによって適当な三角関数を選ばなければならない。その決め方は大きく２つある。上記例１）を運動開始時を t=0 とする時刻で表すことを考えよう。

2.3.1 円運動に戻して考える方法

初めの議論と同じように、円周上の点、速度ベクトル、加速度ベクトルを作図して考える方法。図より、

$x=-A\cos\omega t$
$v=A\omega\sin\omega t$
$a=A\omega^2\cos\omega t$

2.3.2 変化の様子を考える方法

x は、t=0 で最小値 $-A$ から増加していく。このような三角関数は $-cos$ であるから、

$x=-A\cos\omega t$

同様に、速度は 0 から増加するから sin、加速度は最大値から減少し、cos。それぞれの変化の幅は　$A\omega$, $A\omega^2$　であるから、

$v=A\omega\sin\omega t$
$a=A\omega^2\cos\omega t$

2.3.3 微分の併用

x だけ変化の様子で考えて、v, a は x を t で微分していくことで求めるのも可能。

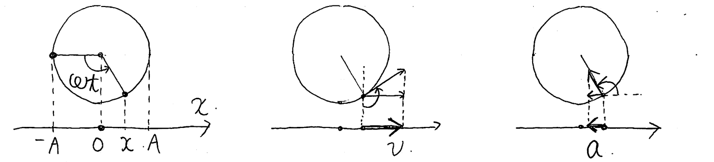
$$v=\frac{dx}{dt},\ a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$$

合成関数の微分法を使うので、１回微分するごとに $(\omega t)'=\omega$ がかかる。

2.3.4 （参考）任意の初期条件に使える変位の式

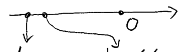
上記例２）のような場合、

円運動で考える

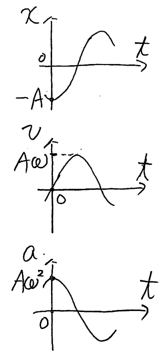


$x=-A\cos\omega t$　　$v=A\omega\sin\omega t$　　$a=A\omega^2\cos\omega t$

変化の様子



	t=0	少し後
x	最小	増加
v	0	⊕
a	最大	減少



$x=-A\cos\omega t$

$v=A\omega\sin\omega t$

$a=A\omega^2\cos\omega t$

微分を使うと暗記が減る

$$\begin{cases} x=A\sin\omega t \\ v=\dfrac{dx}{dt}=A\cos\omega t\cdot(\omega t)' \\ \quad =A\omega\cos\omega t \\ a=\dfrac{dv}{dt}=A\omega(-\sin\omega t)\cdot(\omega t)' \\ \quad =-A\omega^2\sin\omega t \end{cases}$$

$$x = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

$$v = -x_0\omega\sin\omega t + v_0\cos\omega t$$

で表される。$t=0$ を代入すれば、確かに初期条件を満たすことが確かめられる。x の式で三角関数の合成公式を使えば、

$$x = \sqrt{x_0{}^2 + \frac{v_0{}^2}{\omega^2}}\sin(\omega t + \alpha)$$

で、先に求めた振幅と一致することが分かる。

2.4 鉛直ばねの解法

２つ以上の力の合力が復元力となる運動は、同様にして解ける。

2.4.1 運動方程式

質量 m の物体が、天井からつるされたばね定数 k のばねにつながれて、鉛直方向に運動する。このとき、自然長の位置を原点として下向きに x 軸をとれば、物体が受ける合力 F は、

$$F = mg - kx = -k\left(x - \frac{mg}{k}\right)$$

で表される。これは、x 軸の原点への復元力ではないが、新たに下向きに $x = x_0 = \frac{mg}{k}$ を原点とする X 軸をとれば、

$$F = -kX$$

となり、復元力と言える。よって、X 軸の原点つまり $x = x_0$ を中心に単振動をする。

ところで、$x = x_0$ とは $F = 0$ を満たす位置であり、これはばねに物体をつり下げた時のつりあいの位置である。よって、鉛直ばねにおいては、振動中心はつりあいの位置となる。

運動方程式に $F = -kX$ および単振動の加速度の式 $a = -\omega^2 X$ を代入すれば、

$$m(-\omega^2 X) = -kX$$

よって、角振動数、周期は水平ばねと変りなく、

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

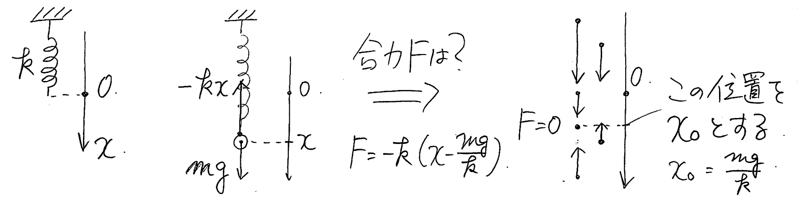
である。

$$\begin{cases} x = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \\ v = -x_0\omega\sin\omega t + v_0\cos\omega t \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = x_0\cdot 1 + \frac{v_0}{\omega}\cdot 0 = x_0 \\ v(0) = -x_0\omega\cdot 0 + v_0\cdot 1 = v_0 \end{cases}$$

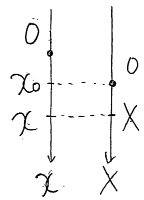
ただし α は、$A = \sqrt{x_0{}^2 + \frac{v_0{}^2}{\omega^2}}$ として、$\begin{cases} \sin\alpha = \frac{x_0}{A} \\ \cos\alpha = \frac{v_0}{A\omega} \end{cases}$ をみたす角。

この式は最も一般的で、例1)なら $x_0 = -A,\ v_0 = 0$ を代入して求まる。

$$x = -A\cos\omega t + \frac{0}{\omega}\sin\omega t = -A\cos\omega t$$



X軸をとる



$X = x - x_0$

$F = -kX$

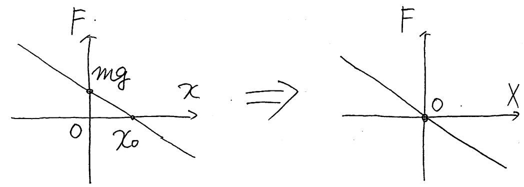
⇒復元力

$x = x_0$ はつりあいの位置

$\because\ mg = kx_0$

あるいは $X = 0$ だから

$F = -k\cdot 0$



$F = -kx + mg \quad\Rightarrow\quad F = -kX$

2.4.2 力学的エネルギー保存則

大きく分けて２つの表現がある。弾性エネルギーと重力による位置エネルギーを別に考える方法と、この２つを込みにして「単振動の位置エネルギー」で考える方法である。後者のほうが計算が楽なことが多い。

エネルギーを別個に考える方法

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2-mgx=(\text{一定})$$

単振動の位置エネルギーを考える方法

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kX^2=(\text{一定})$$

この X は、自然長からではなく、つりあいの位置からの変位であることに注意。

例）つりあいの位置で、下向きに初速 v_0 を与えた。振動の最下点と自然長の位置との距離 L を求めよ。

エネルギーを別個に考える方法

$$0+\frac{1}{2}kL^2-mgL=\frac{1}{2}mv_0{}^2+\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2-mg\cdot\frac{mg}{k}$$

$$\therefore\ L^2-2\frac{mg}{k}L+\left(\frac{mg}{k}\right)^2-\frac{m}{k}v_0{}^2=0$$

$$\therefore\ L=\frac{mg}{k}\pm\sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2-\left\{\left(\frac{mg}{k}\right)^2-\frac{m}{k}v_0{}^2\right\}}=\frac{mg}{k}\pm v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$L>0$ より、 $L=\dfrac{mg}{k}+v_0\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

単振動の位置エネルギーを考える方法

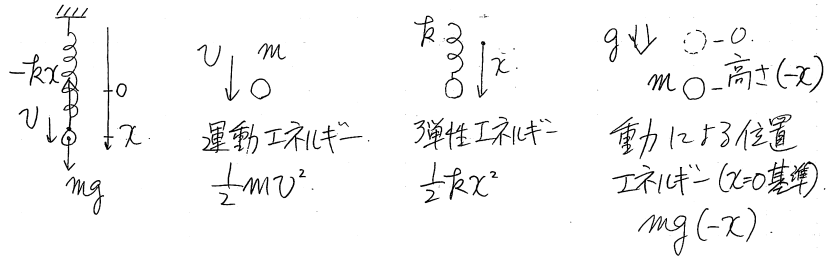
$$0+\frac{1}{2}kX^2=\frac{1}{2}mv_0{}^2+0 \quad \therefore\ X=\pm v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\therefore\ L=\frac{mg}{k}+v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$$

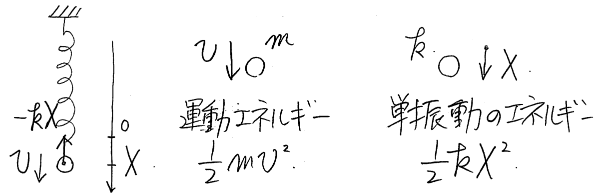
（参考）単振動の位置エネルギーとは何か？

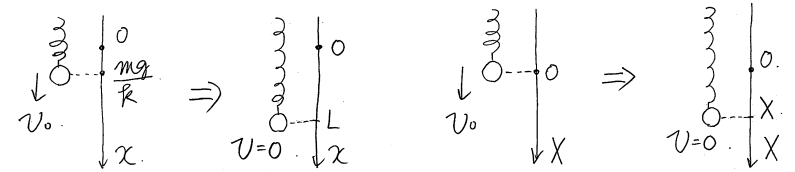
そもそも位置エネルギーとは、「ある力に逆らって基準の位置からその位置まで運ぶために外力がする仕事」と定義されていた。ふつう、その力とは単独の由来による力（重

別個に考えると



単振動の位置エネルギー





力、弾性力、クーロン力、etc）であるが、合力を用いても問題ないはずである。弾性力と重力の合力　$F=-kX$　に逆らってつりあいの位置から X まで動かすのに必要な仕事は、ばねの弾性力　$F=-kx$　に逆らってする仕事と数学的に同一で、

$$U=\frac{1}{2}kX^2$$

となる。この U を用いれば、物体に働いているすべての力が U に含まれているので、運動エネルギーと U の和は保存する。（このエネルギーの名称は「復元力による位置エネルギー」のほうが適切かもしれない）

2.5 ２点間の移動にかかる時間

周期 T との関係を直接考えるか、円運動の図を描いて、角度（位相）から求める。角度 θ にあたるぶん動くとき、かかる時間 t は、

$$t=\frac{\theta}{2\pi}T=\frac{\theta}{\omega}$$

例）水平ばねを伸ばして静かに手を離したとき、はじめて自然長の位置に達するまでの時間 t を求めよ。この単振動の周期は T とする。

1/4 周期にあたるから、$t=T/4$。あるいは、角 $\pi/2$ にあたるだけ動くから、

$$t=\frac{\pi/2}{2\pi}T=\frac{T}{4}$$

2.6 固定されていない物体のある単振動

どの位置でその物体が離れるか、が問われやすい。

離れないための制限：同じ加速度を持つと仮定して求めた垂直抗力 $N \geqq 0$。

例）水平ばね k の左端を壁に、右端を物体 m を固定し、m の右側に物体 M を接触させて A だけ押し縮める。静かに手を離すと、M が m から離れるのはどの位置か。

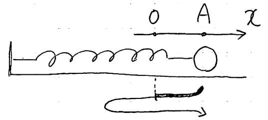
自然長の位置を原点として右向きに x 軸をとる。離れていないとすると両者の加速度は等しく、これを a とする。垂直抗力の大きさを N とすれば、運動方程式はそれぞれ、

$$ma=-kx-N,\quad Ma=N$$

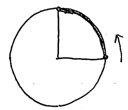
これを解いて、

$$a=-\frac{kx}{m+M},\quad N=-\frac{M}{m+M}kx$$

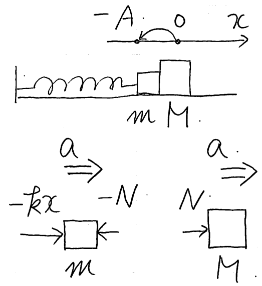
離れるのは $N=0$ となる位置で、$x=0$ すなわち自然長の位置。



$\frac{1}{4}$周期なので $\frac{T}{4}$



$\frac{\pi}{2}$にあたるので $\frac{\pi/2}{2\pi}\cdot T=\frac{T}{4}$



$$ma=-kx-N$$

$$+)\ Ma=N$$

$$(m+M)a=-kx$$

$$\therefore a=-\frac{kx}{m+M}$$

$$\therefore N=Ma=-\frac{M}{m+M}kx$$

2.7 単振動のまとめ

- 単振動であることを示したり、ωやTを求めるとき
  - 軸を設定し、合力が復元力となることを言う。
  - 運動方程式に $a=-\omega^2 x$ とともに代入する。
  - 振動中心は必ずつりあいの位置。$x=0$とずれるときは、新たな軸の導入も考える。
- 初期条件から振幅や最大速度、任意の位置での速度などを求めるとき
  - 力学的エネルギー保存則を用いる。
  - ばね以外が関わるときは、単振動の位置エネルギーが便利。
- 任意の時刻のx, v, aを求めるとき
  - 円運動に戻すか、変化の様子を考えて、xを適当な三角関数を用いて表す。
  - v, aは公式として覚えるより微分したほうが楽。